

---

# MESURES LIMITES POUR L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ DANS LE CAS NON CAPTIF

par

Jean-François Bony

---

**Résumé.** — Cet article est consacré à l'étude des mesures limites associées à la solution de l'équation de Helmholtz avec un terme source se concentrant en un point. Le potentiel est supposé  $C^\infty$  et l'opérateur non-captif. La solution de l'équation de Schrödinger semi-classique s'écrit alors micro-localement comme somme finie de distributions lagrangiennes.

Sous une hypothèse géométrique, qui généralise l'hypothèse du viriel, on en déduit que la mesure limite existe et qu'elle vérifie des propriétés standard. Enfin, on donne un exemple d'opérateur qui ne vérifie pas l'hypothèse géométrique et pour lequel la mesure limite n'est pas unique. Le cas de deux termes sources est aussi traité.

## 1. Introduction.

Dans ce papier, on étudie la limite hautes fréquences de l'équation de Helmholtz, en dimension  $n \geq 1$ , avec un terme source se concentrant en  $x = 0$ . Par un changement de variables, ce problème se ramène à l'étude de la limite quand  $h \rightarrow 0$  de  $u_h$ , la solution de

$$\left(-\frac{h^2}{2}\Delta + V(x) - E\right)u_h = h^{-n/2}S\left(\frac{x}{h}\right).$$

Le membre de droite de cette équation est une fonction qui joue le rôle d'un profil se concentrant en 0 à l'échelle  $h$ . Sa norme  $L^2$  est préservée. L'énergie, ou paramètre de régularisation,  $E$  est dans le demi-plan complexe supérieur et vérifie  $E = E_0 + hE_1 + o(h)$ ,  $E_0 > 0$ , quand  $h \rightarrow 0$ . De plus le comportement du potentiel  $V$  est prescrit à l'infini (dans cet article,  $V$  sera à longue portée).

Plus précisément, on veut calculer les éventuelles mesures semi-classiques de Wigner associées à  $u_h$ . Autrement dit, on cherche à savoir si, pour  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , la quantité

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle,$$

existe et s'écrit  $\langle q, \mu_{h^{-1}} \rangle$  où  $\mu_{h^{-1}}$  est une mesure sur  $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$  indépendante de  $h$  ( $\text{Op}(q)$  est l'opérateur pseudo-différentiel défini en (1.3)). La présence du  $h$  devant le produit scalaire sera obligatoire pour rendre la quantité convergente.

---

**Classification mathématique par sujets (2000).** — 35Q40, 35J10, 35S30, 81Q20.

**Mots clefs.** — Equation de Helmholtz, Mesure semi-classique, Analyse micro-locale.

En général cette mesure vérifie les propriétés suivantes. Elle est supportée dans la surface d'énergie  $E_0$ . Elle est nulle dans la zone entrante (on parle aussi de condition de radiation à l'infini). Enfin cette mesure limite vérifie l'équation de Liouville :

$$(\xi \partial_x - \nabla V(x) \partial_\xi + 2 \operatorname{Im} E_1) \mu_{h^{-1}} = (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 \delta_{x=0} \delta_{\frac{1}{2}\xi^2 + V(0)=E_0}.$$

On verra que le dernier point n'est pas toujours satisfait.

A notre connaissance, le premier travail dans cette direction est du à Benamou, Castella, Katsaounis et Perthame [1]. Sous l'hypothèse que  $V = 0$ , ils obtiennent la convergence vers la mesure précédemment décrite. Ce résultat a été étendu au cas des potentiels variables par Wang [25]. Lorsque la source est portée par une variété, des résultats équivalents ont été obtenus par Castella, Perthame et Runborg [6] dans le cas  $V = 0$  et généralisés par Wang et Zhang [26] aux cas à coefficients variables. Enfin, quand le potentiel est constant de chaque coté d'un hyperplan sur lequel il présente une discontinuité, la propagation de telles mesures semi-classiques a été traitée par Fouassier [10]. Tous ces travaux utilisent des majorations de la résolvante entre espaces de Besov (estimations de Morrey–Campanato). Ces estimations sont parfois obtenues à l'aide de la théorie de Mourre. C'est pourquoi la régularité du potentiel peut être abaissée jusqu'à  $C^2$ , dans certains cas. Néanmoins, tous supposent que le potentiel est nul ou satisfait l'hypothèse du viriel. Ce présent travail a pour but de décrire ce qui se passe quand cette hypothèse est retirée, mais que l'opérateur reste non captif.

Mentionnons qu'il existe également des articles qui prouvent spécifiquement des estimations de la résolvante entre espaces de Besov (voir, par exemple, Perthame et Vega [20] pour des potentiels ne s'annulant pas à l'infini, Wang et Zhang [26] pour des termes sources portés par des surfaces, Castella et Jecko [4] dans le cas  $C^2$  non-captif, Wang [25] et Castella, Jecko et Knauf [5] pour des singularités coulombiennes). Enfin, Castella [3] a étudié la limite faible hautes fréquences de l'équation de Helmholtz dans le cas non captif.

Dans cet article, on démontre que la solution de l'équation de Schrödinger stationnaire peut s'écrire micro-localement près de tout point  $\rho_0 \in \mathbb{R}^{2n}$  comme somme finie de distributions lagrangiennes. Toutefois, la variété  $x = 0$  pose des difficultés, et on peut juste majorer la solution près de l'origine. Une fois cette construction effectuée, il est facile de déduire l'existence de la mesure limite et de la calculer. A cause du caractère bilinéaire de ces mesures, on doit faire une hypothèse géométrique sur les variétés lagrangiennes qui portent la solution. Cette hypothèse est plus générale que l'hypothèse du viriel. Elle, ou une autre du même type, est en fait obligatoire : dans la partie 4, en s'inspirant de l'exemple de Castella [3, section 9], on construit un opérateur qui ne vérifie pas l'hypothèse géométrique et pour lequel la mesure limite n'est pas unique.

Pour obtenir ces résultats, on utilise une méthode dépendante du temps et on écrit la résolvante comme l'intégrale du propagateur en temps positifs. Des constructions BKW développées par Maslov et Hörmander servent alors à approcher le propagateur. Cette idée avait été utilisée par Castella dans [3], mais elle vient surtout, pour ce type de questions, de l'étude de l'amplitude de diffusion réalisée par Robert et Tamura [24] en 1989. Remarquons que, en un certain sens, l'amplitude de diffusion peut être vue comme l'équation de Helmholtz avec terme source à l'infini. Ces méthodes, très gourmandes en dérivées, nécessitent que le potentiel et la transformée de Fourier du terme source soient essentiellement  $C^\infty$ . Par contre, la preuve n'utilise ni la théorie de Mourre ni les estimations de la résolvante entre espaces de

Besov. Cependant le lemme 3.5, qui sert à contrôler la norme  $L^2$  (d'une partie) de la solution très près de  $x = 0$  utilise une décomposition dyadique.

Enfin, avec cette méthode, on peut aussi traiter le cas de deux (ou plusieurs) points sources. Nous aurons besoin d'une hypothèse géométrique qui, comme précédemment, est essentiellement nécessaire pour l'unicité de la mesure. Fouassier [9] avait étudié cette question sous l'hypothèse  $V = 0$ .

On se place dans le cadre de l'analyse semi-classique et  $h \in ]0, h_0[$  désigne le petit paramètre. Dans la suite, on utilisera les notations suivantes. Pour  $m(x, \xi) \geq 0$  une fonction de poids,  $S(m)$  désigne l'ensemble des fonctions  $q(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}_{x, \xi}^{2n})$  telles que

$$(1.1) \quad \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta q(x, \xi, h) = \mathcal{O}(m),$$

pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ . On dit que le symbole  $q(x, \xi, h)$  est classique et on note  $q \in S_{\text{cl}}(m)$  si il existe une suite de symboles  $q_j(x, \xi) \in S(m)$  tel que

$$(1.2) \quad q(x, \xi, h) - \sum_{j=0}^N q_j(x, \xi) h^j \in S(h^{N+1}m) := h^{N+1}S(m).$$

Sous cette hypothèse,  $q_0$  est appelé le symbole principal. Pour  $q \in S(m)$ , l'opérateur pseudo-différentiel (semi-classique en quantification de Weyl) de symbole  $q$  est défini par

$$(1.3) \quad \text{Op}(q)f(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint e^{i(x-y) \cdot \xi / h} q\left(\frac{x-y}{2}, \xi, h\right) f(y) dy d\xi,$$

au sens des intégrales oscillantes. On note  $\Psi(m) = \text{Op}(S(m))$ , l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels de symbole dans  $S(m)$ . Enfin,

$$(1.4) \quad \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int e^{-ix \cdot \xi / h} f(x) dx,$$

est la transformée de Fourier de  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , le dual de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

## 2. Enoncé des résultats.

On considère un opérateur de Schrödinger semi-classique sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , avec  $n \geq 1$ ,

$$(2.1) \quad P = -\frac{h^2}{2}\Delta + V(x),$$

et on fait les hypothèses suivantes.

**(H1)**  $V$  est une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , et il existe  $\rho > 0$  tel que

$$|\partial^\alpha V(x)| \lesssim \langle x \rangle^{-\rho - |\alpha|},$$

pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Autrement dit le potentiel est régulier et à longue portée. Le symbole de  $P$  est noté

$$p(x, \xi) = \frac{\xi^2}{2} + V(x),$$

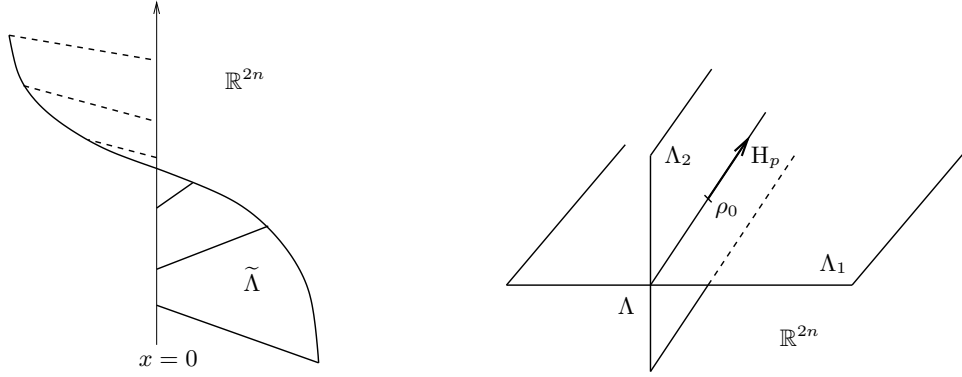


FIGURE 1. La variété  $\tilde{\Lambda}$  et la situation géométrique près d'un point  $\rho_0$  où  $\Lambda$  se “recoupe”.

et son champ hamiltonien

$$H_p = \xi \frac{\partial}{\partial x} - \nabla V(x) \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

**(H2)** La surface d'énergie  $E_0 > 0$  est non captive. C'est à dire,

$$\mathcal{K}(E_0) = \{(x, \xi) \in p^{-1}(E_0); t \rightarrow \exp(tH_p)(x, \xi) \text{ reste borné en temps}\} = \emptyset.$$

**(H3)** De plus,  $V(0) < E_0$ .

**(H4)** On suppose que

$$\text{mes}_{n-1} \{ \xi \in \sqrt{2(E_0 - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}; \exists t > 0 \quad \Pi_x \exp(tH_p)(0, \xi) = 0 \} = 0.$$

$\text{mes}_{n-1}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\sqrt{2(E_0 - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}$  et  $\Pi_x(x, \xi) = x$  est la projection spatiale.

Notons que l'ensemble qui apparait dans (H4) est mesurable car fermé. L'interprétation géométrique de cette hypothèse est la suivante (voir la partie 6 pour les preuves). La solution de l'équation de Helmholtz sera micro-localisée sur l'ensemble  $\Lambda$  défini par

$$(2.2) \quad \Lambda := \{ \exp(tH_p)(0, \xi); t > 0 \text{ et } \xi^2 = 2(E_0 - V(0)) \} \subset p^{-1}(E_0).$$

Cet ensemble peut se “recouper” (voir les figures 1, 2, 3 (en dimension  $n = 1$ ) et 5 (en dimension supérieure)). Mais localement près d'un point  $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in p^{-1}(E_0)$ , il est de la forme

$$(2.3) \quad \Lambda = \bigcup_{k=1}^K \Lambda_k, \text{ si } x_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad \Lambda = \tilde{\Lambda} \cup \bigcup_{k=1}^K \Lambda_k, \text{ si } x_0 = 0,$$

où les ensembles  $\tilde{\Lambda}$  et  $\Lambda_k$  sont définis ci-dessous. La variété

$$(2.4) \quad \tilde{\Lambda} = \{ \exp(tH_p)(0, \xi); 0 < t < \varepsilon_0 \text{ et } \xi^2 = 2(E_0 - V(0)) \},$$

avec  $\varepsilon_0 > 0$  assez petit, est une variété (locale) lagrangienne  $C^\infty$  se projetant bien suivant les variables d'espace, pour  $x \neq 0$ . Elle est représentée sur la figure 1. Les  $\Lambda_k$  sont des variétés (locales) lagrangiennes  $C^\infty$ . Plus précisément,

$$(2.5) \quad \{(t, \xi); 0 < t, \xi^2 = 2(E_0 - V(0)) \text{ et } \exp(tH_p)(0, \xi) = \rho_0\},$$

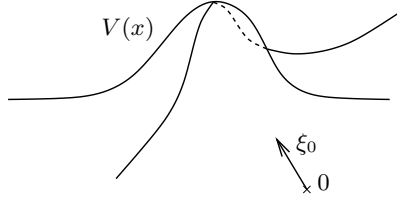


FIGURE 2. Un exemple de potentiel  $V$  qui, pour  $0 < E_0 < \max V$ , ne vérifie pas l'hypothèse du viriel mais pour lequel (H4) est vrai. En effet, l'ensemble qui apparaît dans (H4) est un singleton  $\{\xi_0\}$ .

est un ensemble fini  $\{(t_1, \xi_1), \dots, (t_K, \xi_K)\}$  et

$$(2.6) \quad \Lambda_k = \{\exp(tH_p)(0, \xi); t \text{ au voisinage de } t_k \text{ et } \xi \text{ au voisinage de } \xi_k\}.$$

Ainsi, il se peut que  $\Lambda_j = \Lambda_k$  avec  $j \neq k$ . On notera parfois  $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}$  et, d'après la section 6, l'hypothèse (H4) est équivalente à

**(H4)'** Les intersections des variétés  $\tilde{\Lambda}$  et  $\Lambda_k$  sont de mesure nulle :

$$\text{mes}_n(\Lambda_j \cap \Lambda_k) = 0,$$

pour  $0 \leq j \neq k \leq K$ . La mesure est prise sur la variété  $\Lambda_j$  (ou  $\Lambda_k$ ).

D'après le principe d'absorption limite, on sait que, pour tout  $E \in ]0, +\infty[$ ,

$$(2.7) \quad (P - (E + i0))^{-1} := \lim_{\delta \rightarrow 0} (P - (E + i\delta))^{-1},$$

existe en tant qu'opérateur de  $L^2(\langle x \rangle^{2\alpha} dx)$  dans  $L^2(\langle x \rangle^{-2\alpha} dx)$ , pour tout  $\alpha > 1/2$ . De plus, Robert et Tamura [22] ont démontré que, sous les hypothèses (H1) et (H2),

$$(2.8) \quad \sup_{0 \leq \delta < 1} \|\langle x \rangle^{-\alpha} (P - (E + i\delta))^{-1} \langle x \rangle^{-\alpha}\| \lesssim h^{-1},$$

pour  $E \in ]0, +\infty[$  au voisinage de  $E_0$ . Leur preuve utilise, entre autres choses, les constructions d'Isozaki et Kitada. Mais il existe d'autres démonstrations, notamment celle de C. Gérard et Martinez [12] qui est basée sur la méthode de Mourre [19]. D'autre part, Burq [2] a prouvé (2.8) par l'absurde grâce aux mesures de défauts. Cette estimation résulte aussi du récent papier de C. Gérard [11] qui en donne une preuve directe utilisant uniquement de l'analyse fonctionnelle. Dans la suite et dans ce genre d'estimation,  $\alpha$  désignera toujours un réel strictement supérieur à  $1/2$ .

On prend une donnée  $S_h$  qui se concentre en 0 de la manière suivante :

**(H5)** On considère la suite de fonctions

$$S_h(x) = h^{-n/2} S\left(\frac{x}{h}\right),$$

où  $S$  est dans  $\langle x \rangle^{-N} L^2(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $N \geq 0$ . Donc,  $\hat{S} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

et on fait l'hypothèse suivante sur l'énergie :

(H6) Soit  $E = E(h) \in \mathbb{C}$  une famille d'énergies vérifiant

$$E = E_0 + hE_1 + o(h),$$

et  $\text{Im } E \geq 0$ .

Ce papier est consacré à l'étude de la solution de Helmholtz

$$(2.9) \quad u_h(x) = (P - (E + i0))^{-1} S_h.$$

Si  $\text{Im } E > 0$ , on a  $u_h = (P - E)^{-1} S_h$ .

**Théorème 2.1.** — *Sous les hypothèses (H1)–(H6), il existe une mesure de Radon positive  $\mu_{h^{-1}}$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que, pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,*

$$(2.10) \quad h \langle \text{Op}(q) u_h, u_h \rangle \longrightarrow \langle q, \mu_{h^{-1}} \rangle,$$

quand  $h \rightarrow 0$ . La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  ne dépend pas de  $h$  et l'indice  $h^{-1}$  est juste une notation.

La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  possède les propriétés suivantes qui la caractérisent uniquement :

i) La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  est supportée dans la surface d'énergie  $E_0$  :

$$(2.11) \quad \text{supp } \mu_{h^{-1}} \subset p^{-1}(E_0).$$

ii) La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  est nulle dans la zone entrante :

$$(2.12) \quad \mu_{h^{-1}} = 0 \text{ dans } \{(x, \xi); |x| \text{ grand et } \cos(x, \xi) < -1/2\}.$$

iii) La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  vérifie l'équation d'évolution :

$$(2.13) \quad \begin{aligned} (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} &= (\xi \partial_x - \nabla V(x) \partial_\xi + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \\ &= (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 \delta_{x=0} \delta_{\frac{1}{2}\xi^2 + V(0) = E_0}. \end{aligned}$$

Le membre de gauche de l'équation (2.10) est à prendre au sens de la dualité  $L^2(\langle x \rangle^{2\alpha} dx)$ ,  $L^2(\langle x \rangle^{-2\alpha} dx)$ . On dira qu'une fonction est un  $\mathcal{O}^\alpha(1)$  si sa norme  $L^2(\langle x \rangle^{-2\alpha} dx)$  est un  $\mathcal{O}(1)$ . La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  est indépendante de  $h$ . L'indice  $h^{-1}$  sert juste à indiquer que le produit scalaire dans le membre de gauche de (2.10) a été multiplié par  $h$ .

**Remarque 2.2.** — *En fait, on calcule micro-localement  $u_h$  près de tout point  $\rho_0 = (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$  avec  $x_0 \neq 0$  (pour  $x_0 = 0$ , on a juste les majorations données par le lemme 3.5 et la discussion après le lemme 3.1 (voir aussi la proposition 2.3)). Si  $p(\rho_0) = E_0$  et  $x_0 \neq 0$ , alors  $u_h$  est somme de  $K$  distributions lagrangiennes d'ordre  $h^{-\frac{1}{2}}$ , à symbole classique, portées par les variétés lagrangiennes  $\Lambda_k$  (voir (3.47) et (3.60)). D'autre part,  $u_h$  est nul micro-localement près des points  $\rho_0 \notin p^{-1}(E_0)$  avec  $x_0 \neq 0$ . Remarquons que ces résultats ne nécessitent pas l'hypothèse (H4).*

Comme corolaire, ces constructions donnent un développement asymptotique (au sens  $C^\infty$ ) explicite de  $u_h$  si les lagrangiennes  $\Lambda_k$  se projettent bien spatialement. Enfin, la preuve du lemme 3.5 doit permettre d'étendre la construction de la distribution lagrangienne portée par  $\tilde{\Lambda}$  jusqu'à des voisinages de taille  $h^{1-\varepsilon}$  de 0 faisant apparaître une phase singulière en 0 comme dans le cas de  $-h^2 \Delta/2$ .

L'hypothèse (H4), ou une hypothèse du même type, est obligatoire pour obtenir les conclusions du théorème 2.1. L'exemple donné dans la partie 4 montre que, si cette hypothèse est retirée, la mesure limite n'est plus unique.

Dans la partie consacrée à l'étude des mesures semi-classiques de l'équation de Schrödinger stationnaire de son papier [25], Wang démontre le théorème 2.1 en supposant que le potentiel  $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$  satisfait

$$(2.14) \quad \nu_0(E_0 - V(x)) - x \cdot \nabla V(x) \geq c_0,$$

avec  $c_0 > 0$  et  $\nu_0 \in ]0, 2]$  (équation (4.23) de [25]). Comme  $p = \xi^2 + V(x)$  dans [25], si  $(x(t), \xi(t)) \in p^{-1}(E_0)$  est une courbe hamiltonienne, il vient

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \partial_t(x(t) \cdot \xi(t)) &= 2\xi(t)^2 - x \cdot \nabla V(x) \\ &\geq \nu_0 \xi(t)^2 - x \cdot \nabla V(x) \\ &= \nu_0(E_0 - V(x)) - x \cdot \nabla V(x) \geq c_0. \end{aligned}$$

En particulier,  $x \cdot \xi$  est strictement croissant en temps et l'ensemble qui apparaît dans l'hypothèse (H4) est vide.

L'hypothèse (H4) est proche de l'hypothèse de transversalité énoncée par Castella dans [3]. Cet article est consacré à la limite faible de l'équation de Helmholtz ; autrement dit, à la limite de  $\langle u_h, h^{-n/2} \varphi(\frac{x}{h}) \rangle$ , pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . L'auteur suppose que la dimension  $n$  est supérieure à 2, que l'ensemble

$$(2.16) \quad \mathcal{M} := \{(t, \xi, \eta); \xi^2 = 2(E_0 - V(0)) \text{ et } \exp(tH_p)(0, \xi) = (0, \eta)\},$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  de codimension strictement supérieure à  $n + 2$  et que l'espace tangent de  $\mathcal{M}$  est donné par la linéarisation des équations qui le définissent (hypothèse (H) page 245 de [3]). Mais alors, l'intersection de deux variétés  $\Lambda_j$  et  $\Lambda_k$ , pour  $0 \leq j \neq k \leq K$ , est une sous-variété de  $\Lambda_j$  (ou  $\Lambda_k$ ) de codimension supérieure à 1 et (H4)' est vérifiée. Néanmoins, le problème traité par Castella est différent de celui abordé ici et les comparaisons ne sont pas évidentes.

Le théorème 2.1 décrit la contribution principale de la solution de l'équation de Helmholtz. Mais il reste une partie sous-principale qui n'est pas principalement portée par la surface d'énergie  $E_0$ . Cette contribution est décrite par la proposition suivante.

**Proposition 2.3.** — *Sous les hypothèses (H1)–(H6), il existe une mesure de Radon positive  $\mu_1$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que, pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,*

$$(2.17) \quad \langle \text{Op}(q(p - E_0)^2) u_h, u_h \rangle \longrightarrow \langle q, \mu_1 \rangle,$$

quand  $h \rightarrow 0$ . De plus, on a

$$(2.18) \quad \langle q, \mu_1 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int q(0, \xi) |\widehat{S}(\xi)|^2 d\xi.$$

Le fait que  $u_h$  porte une contribution particulière en  $x = 0$  est spécifique à l'étude de la résolvante. Dans le cas de la mesure spectrale,

$$(2.19) \quad \mathcal{P}(E) = \frac{1}{2i\pi} ((P - (E + i0))^{-1} - (P - (E - i0))^{-1}),$$

$E \in ]0, +\infty[$  proche de  $E_0$ , ce terme n'existe pas et  $\mathcal{P}(E)$  est un opérateur intégral de Fourier régulier. Ce résultat a été démontré par C. Gérard et Martinez dans [13].

De plus, il semble aussi possible de définir une mesure  $\mu_{h^{-1/2}}$  par

$$(2.20) \quad h^{1/2} \langle \text{Op}(q(p - E))u_h, u_h \rangle \longrightarrow \langle q, \mu_{h^{-1/2}} \rangle,$$

pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Sous une hypothèse géométrique, cette mesure semble portée par  $p^{-1}(E_0) \cap \{x = 0\}$ . En fait, cette mesure est un cas particulier de limite faible de l'équation de Helmholtz ; elle code le retour en 0 de la variété  $\Lambda$  lorsque l'hypothèse de transversalité (H) de Castella [3] n'est pas vérifiée.

Avec cette approche, on peut aussi traiter le cas de deux (ou plusieurs) termes sources concentrés en  $x_1 \neq x_2$ , deux points de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $S^1, S^2$  deux fonctions satisfaisant l'hypothèse (H5), on pose

$$S_h^1(x) = h^{-n/2} S\left(\frac{x - x_1}{h}\right) \quad \text{et} \quad S_h^2(x) = h^{-n/2} S\left(\frac{x - x_2}{h}\right).$$

En plus de l'hypothèse (H4) aux points  $x_1$  et  $x_2$ , on rajoute :

(H7) On suppose que

$$\text{mes}_{n-1} \left\{ \xi \in \sqrt{2(E_0 - V(x_1))} \mathbb{S}^{n-1}; \exists t > 0 \quad \Pi_x \exp(tH_p)(x_1, \xi) = x_2 \right\} = 0.$$

$\text{mes}_{n-1}$  est la mesure de Lebesgue sur  $\sqrt{2(E_0 - V(x_1))} \mathbb{S}^{n-1}$ .

Autrement dit on suppose que les trajectoires dans  $p^{-1}(E_0)$  qui vont de  $x_1$  à  $x_2$  sont de mesure nulle. L'hypothèse (H7) ne change pas si  $x_1$  et  $x_2$  sont intervertis.

Pour  $j = 1, 2$ , soient  $\Lambda_k^j$ ,  $k = 0, \dots, K_j$  les variétés lagrangiennes définies en (2.4) et (2.6) en  $\rho_0$  avec point de base  $x_j$ . L'hypothèse (H7) est alors équivalente à

(H7)' Les intersections des variétés  $\Lambda_{k_1}^1$  et  $\Lambda_{k_2}^2$  sont de mesure nulle :

$$\text{mes}_n(\Lambda_{k_1}^1 \cap \Lambda_{k_2}^2) = 0,$$

pour tout  $0 \leq k_j \leq K_j$ ,  $j = 1, 2$ . La mesure est prise sur la variété  $\Lambda_{k_1}^1$  (ou  $\Lambda_{k_2}^2$ ).

Dans ce cas, la solution de Helmholtz est alors la fonction  $u_h$  solution de

$$(2.21) \quad u_h(x) = (P - (E + i0))^{-1} (S_h^1 + S_h^2).$$

On a alors le théorème suivant qui étend le résultat de Fouassier [9] aux cas à coefficients variables.

**Théorème 2.4.** — On suppose (H1), (H2), (H6) et (H7). On suppose aussi que les hypothèses (H3), (H4) et (H5) sont vérifiées en  $x_1$  et en  $x_2$  (autrement dit, en remplaçant le point de base 0 par  $x_1$  et par  $x_2$ ). Alors, pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$(2.22) \quad h \langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle \longrightarrow \langle q, \mu_{h^{-1}}^1 + \mu_{h^{-1}}^2 \rangle \quad \text{quand } h \rightarrow 0.$$

La mesure  $\mu_{h^{-1}}^j$  est la mesure fournie par le théorème 2.1 avec point de base  $x_j$ .



La preuve suit celle du théorème 2.1 et on omet les détails. L'hypothèse (H7) implique que les interactions entre les deux points sources sont négligeables. Comme pour le théorème 2.1, si cette hypothèse est retirée, on peut construire un exemple d'opérateur pour lequel la mesure n'est pas unique. Remarquons que ces hypothèses impliquent  $n \geq 2$ .

Le reste du papier est consacré à la preuve du théorème 2.1. Dans la section 4, on donne un exemple où la mesure n'est pas unique. La proposition 2.3 est démontrée dans la section 5. Enfin, l'équivalence entre (H4) et (H4)' est prouvée dans la section 6.

### 3. Preuve du théorème 2.1.

Dans les sections 3.1–3.6, on pourra supposer que  $E = E_0 + hF_1$ , où  $F_1 \in \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$  ne dépend pas de  $h$ . En effet, toutes les constructions seront régulières par rapport au paramètre  $F_1$  et toutes les estimations seront uniformes en  $F_1$ , quand  $F_1$  varie dans un compact de  $\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ . Et pour obtenir le cas général (H6), il suffira de prendre  $F_1 = h^{-1}(E - E_0) = E_1 + o(1)$ , où  $E$  est donné par (H6).

#### 3.1. Localisation près de la surface d'énergie $E_0$ .

On note  $P_0 = -h^2\Delta/2$  le laplacien libre de symbole  $p_0(x, \xi) = \xi^2/2$ .

**Lemme 3.1.** — Soit  $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $f = 1$  près de  $E_0 - V(0)$  et  $g = 1$  près de  $E_0$ . Alors

$$(3.1) \quad u_h(x) = (P - (E + i0))^{-1} f(P_0) S_h + \mathcal{O}^\alpha(1)$$

$$(3.2) \quad = g(P) (P - (E + i0))^{-1} f(P_0) S_h + \mathcal{O}^\alpha(1),$$

pour tout  $\alpha > 1/2$ .

*Démonstration.* — Soit  $1_{E_0} \prec \tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $f(p_0) = 1$  près du support de  $\tilde{f}(p)$ . Par le calcul fonctionnel et comme  $S_h = \mathcal{O}(1)$ , on a

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_h(x) &= (P - (E + i0))^{-1} \tilde{f}(P) S_h + (P - E)^{-1} (1 - \tilde{f}(P)) S_h \\ &= (P - (E + i0))^{-1} \tilde{f}(P) S_h + \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Ici, on a utilisé le fait que  $\tilde{f}(P) \in \Psi(1)$  et donc  $\tilde{f}(P) S_h \in L^2(\langle x \rangle^{-\infty} dx)$ . D'après le calcul fonctionnel des opérateurs pseudo-différentiels ([7] par exemple), on a

$$(3.4) \quad \tilde{f}(P) \in \tilde{f}(P) f(P_0) + \Psi(h^\infty \langle \xi \rangle^{-\infty}).$$

En utilisant (3.3), (3.4), (2.8) et encore (3.3), il vient

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u_h(x) &= (P - (E + i0))^{-1} \tilde{f}(P) S_h + \mathcal{O}(1) \\ &= (P - (E + i0))^{-1} \tilde{f}(P) f(P_0) S_h + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}^\alpha(h^\infty) \\ &= (P - (E + i0))^{-1} f(P_0) S_h + \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}^\alpha(h^\infty), \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.1). L'identité (3.2) découle de (3.3). □

Remarquons que, comme  $(P - E)^{-1}(1 - \tilde{f}(P)) \in \Psi(\langle \xi \rangle^{-2})$ , la preuve montre que

$$(3.6) \quad u_h(x) = (P - (E + i0))^{-1} f(P_0) S_h + R,$$

où  $R = \mathcal{O}^\alpha(1)$  vérifie  $(1 - \varphi(x))R = \mathcal{O}^\alpha(h^\infty)$  pour toute fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\varphi = 1$  près de 0. En fait, comme  $(P - (E + i0))^{-1} = \mathcal{O}(h^{-1})$  en tant qu'opérateur de  $H^s(\langle x \rangle^{2\alpha} dx)$  dans  $H^s(\langle x \rangle^{-2\alpha} dx)$ , pour tout  $s > 0$ , on peut montrer que  $\partial_x^\beta R = \mathcal{O}^\alpha(h^{-|\beta|})$  et  $(1 - \varphi(x))\partial_x^\beta R = \mathcal{O}^\alpha(h^\infty)$  pour tout  $\beta \in \mathbb{N}^n$ .

### 3.2. Contrôle des temps grands.

Comme dans Robert–Tamura [24] et Castella [3], on voit la résolvante comme l'intégrale en temps du propagateur. En effet,

$$(3.7) \quad (P - (E + i0))^{-1} = \frac{i}{h} \int_0^T e^{-it(P-E)/h} dt + (P - (E + i0))^{-1} e^{-iT(P-E)/h},$$

pour tout  $T \in \mathbb{R}$ . On a alors le lemme suivant.

**Lemme 3.2.** — Pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$(3.8) \quad \text{Op}(q)(P - (E + i0))^{-1} f(P_0) S_h = \text{Op}(q) \frac{i}{h} \int_0^T e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt + \mathcal{O}^{-\beta}(h^\infty),$$

pour tout  $T$  assez grand et  $\beta > 0$ .

*Démonstration.* — La preuve est entièrement donnée au bas de la page 173 de [24], et on rappelle juste les deux étapes. D'abord, on énonce une version du théorème d'Egorov.

**Proposition 3.3 (Proposition 3.1 de [24]).** — Soit  $\omega(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Supposons que  $\omega_t \in S(1)$  soit nul près de

$$\{(x, \xi); (x, \xi) = \exp(tH_p)(y, \eta) \text{ avec } (y, \eta) \in \text{supp } \omega\}.$$

Alors

$$\|\langle x \rangle^\beta \text{Op}(\omega_t) e^{-itP/h} \text{Op}(\omega) \langle x \rangle^\beta\| = \mathcal{O}(h^\infty),$$

pour tout  $\beta \geq 0$ . Cette estimation reste uniformément vraie pour  $t$  dans un compact de  $\mathbb{R}$  à condition que  $\omega_t$  soit uniformément dans  $S(1)$ .

On dit qu'un symbole  $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est de classe  $A_0$  si

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \omega(x, \xi)| \lesssim \langle x \rangle^{-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{-L},$$

pour tout  $L > 0$ . Les ensembles  $\Gamma_-$  (resp.  $\Gamma_+$ ) définis par

$$\Gamma_\pm(R, d, \sigma) = \{(x, \xi); |x| > R, d^{-1} < |\xi| < d \text{ et } \pm \cos(x, \xi) > \sigma\},$$

sont appelés les zones entrantes (resp. sortantes). Dans [24], la proposition 3.3 est énoncée pour  $\omega_t \in A_0$ , mais elle reste vraie pour  $\omega_t \in S(1)$ .

Comme les surfaces d'énergie proche de  $E_0$  sont non-captives, cette proposition implique que le micro-suppport de  $e^{-iT(P-E)/h} f(P_0) S_h(x)$  est micro-localisé dans une zone sortante modulo  $\mathcal{O}^{-\beta}(h^\infty)$ , pour tout  $\beta \geq 0$ . Le lemme 3.2 est alors une conséquence directe du lemme suivant qui repose sur les constructions d'Isozaki et Kitada.

**Proposition 3.4 (Lemme 2.3 de [24]).** — Soit  $\omega, \omega_{\pm} \in A_0$  tel que le support de  $\omega_{\pm}$  (resp.  $\omega$ ) soit dans  $\Gamma_{\pm}(R, d, \sigma_{\pm})$  (resp.  $\{|x| < 9R/10\}$ ), avec  $R$  assez grand et  $\sigma_- < \sigma_+$ . Alors

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^{\beta} \text{Op}(\omega_{\mp})(P - (E \pm i0))^{-1} \text{Op}(\omega_{\pm}) \langle x \rangle^{\beta}\| &= \mathcal{O}(h^{\infty}), \\ \|\langle x \rangle^{\beta} \text{Op}(\omega)(P - (E \pm i0))^{-1} \text{Op}(\omega_{\pm}) \langle x \rangle^{\beta}\| &= \mathcal{O}(h^{\infty}), \end{aligned}$$

pour tout  $\beta \geq 0$ .

Remarquons que Robert et Tamura suppose que l'énergie  $E$  est réelle et que le potentiel est à courte portée,  $\rho > 1$  (pour pouvoir développer la théorie de la diffusion), mais les propositions précédentes sont encore valables pour des potentiels à longue portée (voir l'appendice de [23] où la construction des propagateurs approchés entrant et sortant est faites pour  $\rho > 0$  (voir aussi les travaux d'Isozaki et Kitada [16] et [17])) et pour des énergies vérifiant (H6) (en fait, pour  $E \in \mathbb{C}$  proche de  $E_0$  et  $\pm \text{Im } E \geq 0$ ).  $\square$

### 3.3. Contrôle des temps petits.

En utilisant les lemmes 3.1 et 3.2 et les propriétés du calcul pseudo-différentiel, on obtient, pour  $q \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$(3.9) \quad \text{Op}(q)u_h = \text{Op}(q)\tilde{u}_h + \mathcal{O}^{-\beta}(1),$$

où  $\tilde{u}_h$  est défini par

$$(3.10) \quad \tilde{u}_h := \frac{i}{h} \int_0^T e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt.$$

Dans cette section, on étudie

$$(3.11) \quad B_1(x) := \frac{i}{h} \int_0^T \chi(t) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt,$$

avec  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ .

Remarquons que, pour toute fonction  $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  telle que  $g = 1$  près de 0,

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f(P_0) S_h &= g(x) f(P_0) S_h + \mathcal{O}(h^{\infty}) \\ &= (2\pi)^{-n} h^{-\frac{n}{2}} \int g(x) e^{ix \cdot \xi / h} f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi + \mathcal{O}(h^{\infty}). \end{aligned}$$

De plus, le support de  $g$  (resp.  $f$ ) est aussi proche de 0 (resp.  $E_0 - V(0)$ ) que l'on veut. Donc

$$(3.13) \quad B_1(x) = \frac{ih^{-1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \int \int_0^T \chi(t) e^{-it(P-E)/h} e^{ix \cdot \xi / h} g(x) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) dt d\xi + \mathcal{O}(h^{\infty}).$$

La norme  $L^2$  de  $B_1$  très près de  $x = 0$  est contrôlée par le lemme suivant.

**Lemme 3.5.** — Soit  $\chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ ,  $\chi = 1$  près de 0 et de support suffisamment proche de 0. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$(3.14) \quad 1_{|x| < \varepsilon} B_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon} h^{-\frac{1}{2}}),$$

en norme  $L^2$ .

*Démonstration.* — D'après la méthode BKW (voir [8] ou [7] par exemple), on sait que, pour tout  $t$  assez petit,

$$(3.15) \quad e^{-it(P-E)/h}(g(y)e^{iy \cdot \xi/h}) = a(t, x, \xi, h)e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

La phase  $\varphi$  et le symbole  $a$  sont  $C^\infty$  par rapport à  $t, x, \xi$ . La phase vérifie l'équation eikonale

$$(3.16) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi + p(x, \partial_x \varphi) - E_0 = 0 \\ \varphi(0, x, \xi) = x \cdot \xi \end{cases}$$

L'amplitude  $a(t, x, \xi)$  est à support compact en  $x$  et développable par rapport à  $h$

$$a(t, x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j(t, x, \xi).$$

De plus, les coefficients  $a_j$  vérifient les équations de transport habituelles

$$(3.17) \quad \begin{aligned} (\partial_t + \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x + \Delta_x \varphi / 2 - F_1) a_0 &= 0 \\ (\partial_t + \nabla_x \varphi \cdot \nabla_x + \Delta_x \varphi / 2 - F_1) a_j &= \frac{1}{2} \Delta a_{j-1} \quad \text{pour } j \geq 1, \end{aligned}$$

avec données en  $t = 0$

$$(3.18) \quad \begin{aligned} a_0(0, x) &= g(x) \\ a_j(0, x) &= 0 \quad \text{pour } j \geq 1. \end{aligned}$$

En particulier, comme annoncé au début de la partie 3, les  $a_j$  sont holomorphes par rapport à  $F_1$ .

On est alors amené à calculer

$$(3.19) \quad J := \int_0^T \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt,$$

puisque  $B_1 = \frac{ih^{-1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} J + \mathcal{O}(h^\infty)$ . Pour  $\delta \gg h$  petit, on note

$$(3.20) \quad J_\delta(x) := 1_{\delta < |x| < 2\delta} \int_0^T \int \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt,$$

et on essaye d'estimer  $J_\delta$ .

Bien sûr, pour  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$(3.21) \quad J_\delta^\infty(x) := 1_{|x| < \delta} \int_0^T \int \tilde{\chi}(t/\delta) \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt,$$

vérifie

$$(3.22) \quad \|J_\delta^\infty\|_{L^2} = \mathcal{O}(\delta^{1+\frac{n}{2}}).$$

Remarquons que, d'après (3.16), on a

$$(3.23) \quad \varphi(t, x, \xi) = x \cdot \xi - t(\xi^2/2 + V(x) - E_0) + t^2 S(1).$$

De plus, grâce au lemme 3.1,  $\xi^2$  reste dans un compact disjoint de 0 sur le support de  $f(\xi^2/2)$ . En particulier, pour  $C_1 \delta < t < 1/C_1$  avec  $C_1$  assez grand (indépendant de  $\delta$ ), on a

$$(3.24) \quad -\xi \cdot \partial_\xi \varphi = -x \cdot \xi + t\xi^2 + t^2 S(1) \geq \delta,$$

sur le support de  $1_{\delta < |x| < 2\delta} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2)$ . Comme les dérivées par rapport à  $\xi$  de la fonction  $\frac{-\delta\xi}{-x \cdot \xi + t\xi^2 + t^2 S(1)}$  sont uniformément bornées, des intégrations par partie en  $\xi$  donnent, pour  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]-\infty, C_1 + 1])$  avec  $\tilde{\chi} = 1$  près de  $]-\infty, C_1]$ ,

$$\begin{aligned} J_\delta^+(x) &:= 1_{\delta < |x| < 2\delta} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} (1 - \tilde{\chi}(t/\delta)) \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt \\ (3.25) \quad &= \mathcal{O}((h/\delta)^M), \end{aligned}$$

pour tout  $M \in \mathbb{N}$ . Ainsi

$$(3.26) \quad \|J_\delta^+\|_{L^2} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{n}{2}} (h/\delta)^M),$$

pour tout  $M \in \mathbb{N}$ .

D'un autre coté, pour  $t < \delta/C_2$  avec  $C_2$  assez grand, on a

$$(3.27) \quad \frac{x \cdot \partial_\xi \varphi}{x^2} = \frac{x^2 - tx \cdot \xi + t^2 x S(1)}{x^2} \geq 1,$$

sur le support de  $1_{\delta < |x| < 2\delta} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2)$ . Comme les dérivées par rapport à  $\xi$  de la fonction  $\frac{\delta x}{x^2 - tx \cdot \xi + t^2 x S(1)}$  sont uniformément bornées, des intégrations par partie en  $\xi$  donnent, pour  $\overline{\chi} \in C_0^\infty(]-\infty, C_2])$  avec  $\overline{\chi} = 1$  près de  $]-\infty, C_2/2]$ ,

$$\begin{aligned} J_\delta^-(x) &:= 1_{\delta < |x| < 2\delta} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\chi}(t/\delta) \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt \\ (3.28) \quad &= ((h/\delta)^M), \end{aligned}$$

pour tout  $M \in \mathbb{N}$ . Ainsi

$$(3.29) \quad \|J_\delta^-\|_{L^2} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{n}{2}} (h/\delta)^M),$$

pour tout  $M \in \mathbb{N}$ .

Il reste à étudier

$$(3.30) \quad J_\delta^0(x) := 1_{\delta < |x| < 2\delta} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \check{\chi}(t/\delta) \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt,$$

où  $\check{\chi} = (1 - \overline{\chi})\tilde{\chi}$  à son support compact disjoint de 0. On fait alors le changement de variables

$$t = \delta T, \quad x = \delta X, \quad \xi = \Xi.$$

Le symbole  $1_{\delta < |x| < 2\delta} \check{\chi}(t/\delta) \chi(t) a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi)$  devient  $1_{1 < |X| < 2} \check{a}(T, X, \Xi)$  où le symbole  $\check{a} \in S(1)$  est à support compact dans  $]0, +\infty[_T \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})_X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})_\Xi$ . On pose

$$(3.31) \quad \Phi(T, X, \Xi, \delta) = \delta^{-1} \varphi(\delta T, \delta X, \Xi).$$

Cette fonction est  $C^\infty$  par rapport aux variables  $T, X, \Xi$  et  $\delta$ . D'après (3.23), elle s'écrit

$$(3.32) \quad \Phi(T, X, \Xi, \delta) = X \cdot \Xi - T(\Xi^2/2 + V(0) - E_0) + \delta R(T, X, \Xi, \delta),$$

où  $R \in S(1)$  sur le support de  $\check{a}$ . Toujours sur le support de  $\check{a}$ , les points critiques en  $(T, \Xi)$  de  $\Phi$  sont les points tels que

$$(3.33) \quad \partial_{T, \Xi} \Phi = \begin{pmatrix} -\Xi^2/2 - V(0) + E_0 + \delta \partial_T R \\ X - T\Xi + \delta \partial_\Xi R \end{pmatrix} = 0.$$

Pour  $\delta = 0$ , il existe un unique point critique  $\left(\tilde{T}(X, 0) = \frac{|X|}{\sqrt{2(E_0 - V(0))}}, \tilde{\Xi}(X, 0) = \frac{X\sqrt{2(E_0 - V(0))}}{|X|}\right)$  (car  $T > 0$  sur  $\text{supp}(\check{a})$ ). En ce point,

$$(3.34) \quad \text{Hess}_{T, \Xi} \Phi = \begin{pmatrix} 0 & -t\Xi \\ -\Xi & -T \end{pmatrix},$$

est de déterminant  $-T^{n-1}\Xi^2$  ce qui est uniformément minoré sur  $\text{supp}(\check{a})$ . Par le théorème des fonctions implicite, pour  $\delta$  assez petit, l'équation  $\partial_{T, \Xi} \Phi = 0$  a donc une unique solution  $(\tilde{T}, \tilde{\Xi})(X, \delta) = (\tilde{T}, \tilde{\Xi})(X, 0) + \delta \tilde{R}$  avec  $\tilde{R} \in S(1)$ . En particulier, d'après (3.32) et (3.34),  $\text{Hess}_{T, \Xi} \Phi$  est uniformément minoré au point critique pour  $\delta \ll 1$ . En écrivant

$$(3.35) \quad \partial_{T, \Xi} \Phi(T, \Xi) = \text{Hess}_{T, \Xi} \Phi(\tilde{T}, \tilde{\Xi})(T - \tilde{T}, \Xi - \tilde{\Xi}) + \mathcal{O}(|T - \tilde{T}|^2, |\Xi - \tilde{\Xi}|^2),$$

on constate que

$$(3.36) \quad \frac{|(T, \Xi) - (\tilde{T}, \tilde{\Xi})|}{|\partial_{T, \Xi} \Phi(T, \Xi)|},$$

est uniformément borné. En appliquant la méthode de la phase stationnaire (le paramètre semi-classique est ici  $h/\delta$ ) à paramètre (théorème 7.7.5 de [14]), il vient

$$(3.37) \quad \begin{aligned} J_\delta^0(x) &= \delta \iint 1_{1 < |X| < 2} \check{a}(T, X, \Xi) e^{i\Phi(T, X, \Xi, \delta)/h} d\Xi dT \\ &= \mathcal{O}(\delta(h/\delta)^{\frac{n+1}{2}}). \end{aligned}$$

Et donc

$$(3.38) \quad \|J_\delta^0(x)\|_{L^2} = \mathcal{O}(\delta^{\frac{n}{2}} \delta(h/\delta)^{\frac{n+1}{2}}) = \mathcal{O}(\delta^{\frac{1}{2}} h^{\frac{n+1}{2}}).$$

En, utilisant une décomposition dyadique  $\delta = 2^{-n}$  avec  $h^{1-\mu} < \delta < 2\varepsilon$  ainsi que (3.22), (3.26), (3.29) et (3.38), il vient

$$(3.39) \quad \begin{aligned} \|1_{|x| < \varepsilon} J\|_{L^2} &\leq (\|J_{h^{1-\mu}}^\infty\| + \|J_{h^{1-\mu}}^+\|) + \left( \sum_{\substack{\delta=2^{-n} \\ h^{1-\mu} < \delta < 2\varepsilon}} \|J_\delta^-\| + \|J_\delta^0\| + \|J_\delta^+\| \right) \\ &\lesssim h^{(1-\mu)(\frac{n}{2}+1)} + h^{(1-\mu)\frac{n}{2}} h^{\mu M} + \sum_{\substack{\delta=2^{-n} \\ h^{1-\mu} < \delta < 2\varepsilon}} \delta^{\frac{n}{2}} (h/\delta)^M + \delta^{\frac{1}{2}} h^{\frac{n+1}{2}} + \delta^{\frac{n}{2}} (h/\delta)^M \\ &\lesssim h^{\frac{n+1}{2}} (h^{\frac{1}{2}-\mu(\frac{n}{2}+1)} + h^{\mu M - \frac{1}{2}-\mu\frac{n}{2}} + h^{\mu M - \frac{n+1}{2}} |\ln h| + \sqrt{\varepsilon} + h^{\mu M - \frac{n+1}{2}} |\ln h|) \\ &\lesssim h^{\frac{n+1}{2}} (\sqrt{\varepsilon} + h^\nu), \end{aligned}$$

avec  $\nu > 0$ . Pour obtenir (3.39), on fixe  $\mu > 0$  assez petit (pour majorer le premier terme) puis  $M$  assez grand.  $\square$

### 3.4. Calcul près de 0.

Dans cette partie, on reprend le calcul de

$$(3.40) \quad B_1(x) = \frac{ih^{-1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \iint_0^T \chi(t) e^{i\varphi(t, x, \xi)/h} a(t, x, \xi, h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt + \mathcal{O}(h^\infty),$$

pour  $\delta_1 < |x| < \delta_2$  avec  $0 < \delta_1 < \delta_2$  petits mais fixés. D'après (3.29), on a vu que

$$(3.41) \quad B_1(x) = \frac{ih^{-1-\frac{n}{2}}}{(2\pi)^n} \iint_0^T \check{\chi}(t) e^{i\varphi(t,x,\xi)/h} a(t,x,\xi,h) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi) d\xi dt + \mathcal{O}(h^\infty),$$

avec  $\check{\chi} = \chi(1 - \overline{\chi})$ , où  $\overline{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $\overline{\chi} = 1$  près de 0. D'après (3.30)–(3.37), on sait que l'on peut utiliser la méthode de la phase stationnaire en  $t, \xi$  dans (3.41) (pour tout  $x$ , la phase a un unique point critique qui est non dégénéré). D'un autre côté, en un tel point, on a

$$(3.42) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi(t, x, \xi) = 0 \\ \partial_\xi \varphi(t, x, \xi) = 0. \end{cases}$$

Rappelons que, d'après la proposition IV-14 i) de [21],

$$(3.43) \quad (x, \partial_x \varphi) = \exp(tH_p)(\partial_\xi \varphi, \xi),$$

et d'après (40) de [21], on a

$$(3.44) \quad \xi(s) = \partial_x \varphi(s, x(s), \xi),$$

pour toute courbe hamiltonienne  $(x(s), \xi(s))$  avec  $\xi(0) = \xi$ . En utilisant (3.16), (3.43) et (3.44), on voit que (3.42) est équivalente à

$$(3.45) \quad \begin{cases} p(0, \xi) = E_0 \\ \Pi_x \exp(tH_p)(0, \xi) = x. \end{cases}$$

En utilisant (3.44) et en notant  $\gamma(x) = (x(s), \xi(s))$  la courbe hamiltonienne  $\exp(sH_p)(0, \xi)$  donnée par (3.45), il vient

$$(3.46) \quad \begin{aligned} \psi(x) &:= \varphi(t, x, \xi) = \varphi(0, x(0), \xi) + \int_0^t \partial_x \varphi(s, x(s), \xi) \dot{x}(s) ds \\ &= \int_0^t \xi(s) \dot{x}(s) ds = \int_{\gamma(x)} \xi dx. \end{aligned}$$

Et donc, la méthode de la phase stationnaire dans (3.41) donne

$$(3.47) \quad B_1(x) = b(x, h) h^{-\frac{1}{2}} e^{i\psi(x)/h} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où  $b(x, h) \sim \sum_{j \geq 0} b_j(x) h^j$  est un symbole classique à support compact avec

$$(3.48) \quad b_0 = i(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \varphi''_{t,\xi}}}{|\det \varphi''_{t,\xi}|^{\frac{1}{2}}} \check{\chi}(t) a_0(t, x, \xi) f(\xi^2/2) \widehat{S}(\xi),$$

où  $(t, \xi)$  est l'unique couple de points (avec  $t$  dans le support de  $\check{\chi}$ ) vérifiant (3.45). A l'aide de (3.34), on trouve  $\operatorname{sgn} \varphi''_{t,\xi} = 1 - n$  et on remarque que

$$(3.49) \quad |\det \varphi''_{t,\xi}|^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{n-1}{2}} |\xi| (1 + o(1)),$$

quand  $t \rightarrow 0$ .

Notons  $(x(t, \xi), \xi(t, \xi))$  la courbe hamiltonienne issue de  $(0, \xi)$  avec  $p(0, \xi) = E_0$ . La définition du champ hamiltonien donne  $x(t, \xi) = t\xi + t^2 S(1)$  et, d'après la discussion

précédente,  $(t, \xi) \rightarrow x(t, \xi)$  est un difféomorphisme pour  $t$  assez petit mais disjoint de 0. De plus, son jacobien vérifie :

$$(3.50) \quad \left| \frac{dx}{d(t, \xi)} \right| = \xi^2 t^{n-1} (1 + \mathcal{O}(t)).$$

### 3.5. Calcul pour les temps intermédiaires.

Dans cette partie, on calcule

$$(3.51) \quad \tilde{u}_h = \frac{i}{h} \int_0^T e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt,$$

micro-localement près de  $\rho_0 \in p^{-1}(E_0)$ . Autrement dit, on calcule  $\text{Op}(q)\tilde{u}_h$ , pour  $q$  un symbole à support compact proche de  $\rho_0$ .

Soient  $t_1, \dots, t_K$  les temps strictement positifs définies dans (2.5). On se donne une fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 près de 0 et à support assez proche de 0 (et donc  $\chi$  est nulle près des  $t_k$ ). Soit  $\check{\chi} \in C_0^\infty([0, +\infty[)$  une fonction comme dans la partie précédente, à support assez proche de 0 et vérifiant  $\check{\chi}(t - \nu) = 1$  près de 0 pour un certain  $\nu > 0$  petit. Il existe alors une fonction  $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , nulle près de 0 et des  $t_k$ , telle que, pour  $t \in [0, T]$ ,

$$(3.52) \quad \chi(t) + \sum_{k=1}^K \check{\chi}(t - \nu - t_k) + \tilde{\chi}(t) = 1.$$

Ainsi,  $\tilde{u}_h$  s'écrit

$$(3.53) \quad \tilde{u}_h = B_1 + B_2 + \frac{i}{h} \int_0^T \tilde{\chi}(t) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt,$$

avec

$$(3.54) \quad B_2 := \sum_{k=1}^K \frac{i}{h} \int \check{\chi}(t - \nu - t_k) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt.$$

Rappelons que, d'après [21], l'évolution est un opérateur intégral de Fourier d'ordre 0 :

$$(3.55) \quad e^{-it(P-E)/h} \in \mathcal{I}_{\text{cl}}^0(\Lambda_t),$$

dont la relation canonique est donnée par le flot hamiltonien :

$$(3.56) \quad \begin{aligned} \Lambda_t &= \{(x, \xi, y, \eta); (x, \xi) = \kappa_t(y, \eta)\} \\ \kappa_t(y, \eta) &= \exp(tH_p)(y, \eta). \end{aligned}$$

La notation cl signifie que le symbole de l'OIF à un développement en puissance de  $h$ . De plus, le symbole et chaque terme de son développement sont holomorphes par rapport à  $F_1$ .

Comme le micro-support de  $f(P_0)S_h$  est contenu dans  $\{(0, \xi); \xi^2/2 \in \text{supp } f\}$ , le théorème d'Egorov implique que le dernier terme dans (3.53) est micro-localement nul près de  $\rho_0$ . En effet, pour  $t \in \text{supp } \mathbf{1}_{[0, T]} \tilde{\chi}(t)$ , l'opérateur dévolution  $e^{-it(P-E)/h}$  envoie le micro-support de  $f(P_0)S_h$  hors du support de  $q$ . Rappelons que " $A = B$  micro-localement près de  $\rho_0$ " signifie que  $\text{Op}(q)A = \text{Op}(q)B + \mathcal{O}(h^\infty)$ . Comme  $B_1$  est bien décrit par les sections 3.3 et 3.4, il nous reste à étudier  $B_2$ .



On peut écrire

$$(3.57) \quad B_2 = \sum_{k=0}^K e^{-i(\nu+t_k)(P-E)/h} \left( \frac{i}{h} \int_0^{+\infty} \check{\chi}(t) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt \right).$$

D'après la partie précédente, on sait que

$$(3.58) \quad \frac{i}{h} \int_0^{+\infty} \check{\chi}(t) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt = h^{-\frac{1}{2}} b(x, h) e^{i\psi(x)/h} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où  $b(x, h)$  est un symbole classique à support dans un compact proche de 0. En particulier,

$$(3.59) \quad b(x, h) e^{i\psi(x)/h} \in \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\tilde{\Lambda}, b_0, \Omega),$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$  est un petit voisinage de  $\{(0, \xi); \xi^2 = 2(E_0 - V(0))\}$ . La notation  $\mathcal{D}_{\text{cl}}^\alpha(\Lambda, a_0, U)$  désigne l'ensemble des distributions lagrangiennes semi-classiques,  $u$ , d'ordre  $\alpha$ , de variété lagrangienne  $\Lambda$ , de symbole principal  $a_0$  (défini sur le fibré de Maslov), de symbole classique (c'est à dire que dans toute représentation à l'aide d'une phase non-dégénérée, le symbole de l'intégrale oscillante  $a(x, \theta, h)$  vérifie  $a \sim \sum_{j \geq 0} a_j(x, \theta) h^j$ ) et de micro-support inclus dans  $U \subset \mathbb{R}^{2n}$  (c'est à dire  $\text{Op}(1-q)u = \mathcal{O}(h^\infty)$  pour tout  $q \in S(1)$  avec  $q = 1$  près de  $U$ ). Pour toute les questions concernant les distributions lagrangiennes, on renvoie à la section 1.2.1 de [18] pour un exposé semi-classique et à [15] dans le cas classique.

Mais alors, d'après (3.55), (3.56), (3.59), le théorème d'Egorov et le théorème 1.2.12 (iii) de [18] sur le calcul de l'application d'un OIF à une intégrale oscillante, on a

$$e^{-i(\nu+t_k)(P-E)/h} h^{-\frac{1}{2}} b(x, h) e^{i\psi(x)/h} \in h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\exp((\nu+t_k)H_p)\tilde{\Lambda}, b_0^k, \exp((\nu+t_k)H_p)(\Omega)).$$

En notant  $\Lambda_k := \exp((\nu+t_k)H_p)\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$  et  $\Omega_k := \exp((\nu+t_k)H_p)(\Omega)$ , on a donc,

$$(3.60) \quad B_2 = \sum_{k=0}^K B_2^k \quad \text{avec} \quad B_2^k \in h^{-\frac{1}{2}} \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\Lambda_k, b_0^k, \Omega_k),$$

micro-localement près de  $\rho_0$ . Les  $\Lambda_k$  coïncident avec ceux définis en (2.6) et les symboles des distributions lagrangiennes ainsi que les  $b_0^k$  sont réguliers par rapport à  $F_1$ .

Finalement remarquons que, micro-localement près de  $\rho_0$ , on a

$$\begin{aligned} (P-E)B_2^k &= (P-E) \frac{i}{h} \int_0^{+\infty} \check{\chi}(t-\nu-t_k) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \check{\chi}(t-\nu-t_k) \partial_t e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt \\ (3.61) \quad &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t(\check{\chi})(t-\nu-t_k) e^{-it(P-E)/h} f(P_0) S_h dt. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'Egorov et les propriétés du support de  $\partial_t(\check{\chi})$ , il vient

$$(3.62) \quad (P-E)B_2^k = 0,$$

micro-localement près de  $\rho_0$ .

### 3.6. Convergence vers une mesure de Wigner.

**Proposition 3.6.** — Il existe une mesure de Radon positive  $\mu_{h^{-1}}$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  telle que, pour tout  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ,

$$(3.63) \quad h\langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle \longrightarrow \langle q, \mu_{h^{-1}} \rangle,$$

quand  $h \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — Par linéarité, on peut supposer que  $q$  est à support compact près d'un point  $\rho_0$ . Soit  $v(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  avec  $v = 1$  près de 0 et  $v_\delta(x) = v(x/\delta)$  pour  $\delta > 0$ . D'après l'hypothèse (H4)' et comme l'intersection de deux variétés  $\Lambda_j$  et  $\Lambda_k$  est forcément un fermé, la régularité de la mesure combinée avec le lemme d'Urysohn implique qu'il existe une suite de fonctions  $f_m(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$  telles que, sur le support de  $q$ ,

$$(3.64) \quad \text{mes}_n(\text{supp}(1 - f_m) \cap \Lambda) \longrightarrow 0,$$

lorsque  $m \rightarrow +\infty$  et  $\Lambda$  restreint au support de  $f_m$  ne se recoupe pas.

Plus explicitement, les  $f_m$  sont construites de la façon suivante : comme le fermé  $\Lambda_j \cap \Lambda_k$  est de mesure nulle dans la variété lisse  $\Lambda_j$ , la régularité de la mesure entraîne l'existence d'un ouvert  $U_j^m$  de  $\Lambda_j$ , de mesure inférieure à  $1/m$ , qui contient  $\Lambda_j \cap \Lambda_k$ . Comme  $U_j^m$  est la restriction à  $\Lambda_j$  d'un ouvert  $V_j^m$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , le lemme d'Urysohn nous fournit une fonction  $f_j^m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ , de support inclus dans  $V_j^m$ , égale à 1 au voisinage de  $\Lambda_j \cap \Lambda_k$ . De la même manière, on construit  $f_k^m$  en intervertissant les indices  $j$  et  $k$ . On pose alors  $f_m = 1 - f_j^m f_k^m$  que l'on tronque hors du support de  $q$ .

Soit  $\tilde{q} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  à support proche de celui de  $q$  et égal à 1 près de celui-ci. D'après (3.9), (3.53), la discussion après (3.56) et les propriétés du calcul pseudo-différentiel, on a

$$(3.65) \quad \text{Op}(q)u_h = \text{Op}(q)(B_1 + B_2) + R_0 \quad \text{et} \quad \text{Op}(\tilde{q})u_h = \text{Op}(\tilde{q})(B_1 + B_2) + \tilde{R}_0,$$

avec  $R_0, \tilde{R}_0 = \mathcal{O}^{-\beta}(1)$  pour tout  $\beta \geq 0$ . Le lemme 3.5, (3.47) et (3.60) et la proposition 1.2.2 de [18] sur la norme  $L^2$  d'une intégrale oscillante impliquent

$$(3.66) \quad v_\delta B_1 = R_1 = \mathcal{O}(\sqrt{\delta}h^{-\frac{1}{2}})$$

$$(3.67) \quad \text{Op}(1 - f_m)(1 - v_\delta)B_1 = R_2 = o_{m \rightarrow \infty}(h^{-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}_m(h^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{Op}(f_m)(1 - v_\delta)B_1 = h^{-\frac{1}{2}}B_1^{m, \delta}$$

$$(3.68) \quad \text{avec } B_1^{m, \delta} \in \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\tilde{\Lambda}, (1 - v_\delta)f_m|_{\Lambda_k} b_0, \Omega \cap \text{supp } f_m(1 - v_\delta))$$

$$(3.69) \quad \text{Op}(1 - f_m)B_2 = R_3 = o_{m \rightarrow \infty}(h^{-\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}_m(h^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{Op}(f_m)B_2 = h^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^K B_2^{k, m}$$

$$(3.70) \quad \text{avec } B_2^{k, m} \in \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\Lambda_k, f_m|_{\Lambda_k} b_0^k, \Omega_k \cap \text{supp } f_m)$$

Ici, une fonction est un  $o_{m \rightarrow \infty}(1)$  si elle tend vers 0 lorsque  $m \rightarrow \infty$ . De même, une fonction est un  $\mathcal{O}_m(h)$  si, pour tout  $m$  fixé, elle est un  $\mathcal{O}(h)$ . En particulier,

$$(3.71) \quad \text{Op}(q)u_h = \mathcal{O}^{-\beta}(h^{-\frac{1}{2}}),$$

pour tous  $\beta \geq 0$  et  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ .

On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle &= \langle \text{Op}(q)u_h, \text{Op}(\tilde{q})u_h \rangle + \mathcal{O}(h^\infty) \\
&= \langle R_0 + \text{Op}(q)(R_1 + R_2 + R_3), \text{Op}(\tilde{q})u_h \rangle \\
&\quad + h^{-\frac{1}{2}} \langle \text{Op}(q)(B_1^{m,\delta} + \sum B_2^{k,m}), R_0 + \text{Op}(\tilde{q})(R_1 + R_2 + R_3) \rangle \\
&\quad + h^{-1} \langle \text{Op}(q)(B_1^{m,\delta} + \sum B_2^{k,m}), \text{Op}(\tilde{q})(B_1^{m,\delta} + \sum B_2^{k,m}) \rangle + \mathcal{O}(h^\infty) \\
&= h^{-1} \langle \text{Op}(q)(B_1^{m,\delta} + \sum B_2^{k,m}), (B_1^{m,\delta} + \sum B_2^{k,m}) \rangle \\
(3.72) \quad &\quad + h^{-1} (o_{m \rightarrow \infty}(1) + \mathcal{O}(\sqrt{\delta}) + \mathcal{O}_{\delta,m}(h^{\frac{1}{2}})).
\end{aligned}$$

Comme les  $K+1$  variétés lagrangiennes  $\tilde{\Lambda}$  et  $\Lambda_k$  ne s'intersectent pas sur  $\Omega \cap \text{supp } f_m(1 - v_\delta)$  et  $\Omega_k \cap \text{supp } f_m$ , les distributions lagrangiennes  $B_1^{m,\delta}$  et  $B_2^{k,m}$  ont des micro-soutports deux à deux disjoints. Ceci entraîne

$$(3.73) \quad \langle \text{Op}(q)B_1^{m,\delta}, B_2^{k,m} \rangle = \mathcal{O}_{m,\delta}(h^\infty)$$

$$(3.74) \quad \langle \text{Op}(q)B_2^{k,m}, B_2^{\tilde{k},m} \rangle = \mathcal{O}_m(h^\infty) \text{ pour } k \neq \tilde{k}.$$

Le calcul de l'application d'un opérateur pseudo-différentiel sur une distribution lagrangienne (théorème 1.2.8 de [18]) donne

$$(3.75) \quad \text{Op}(q)\mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\Lambda, a_0, U) \subset \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\Lambda, q|_\Lambda \times a_0, U).$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\text{Op}(q)B_1^{m,\delta} &\in \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\tilde{\Lambda}, q(1 - v_\delta)f_m|_{\Lambda_k} b_0, \Omega \cap \text{supp } f_m(1 - v_\delta)) \\
\text{Op}(q)B_2^{k,m} &\in \mathcal{D}_{\text{cl}}^0(\Lambda_k, qf_m|_{\Lambda_k} b_0^k, \Omega_k \cap \text{supp } f_m).
\end{aligned}$$

Un calcul évident montre alors que

$$(3.76) \quad \langle \text{Op}(q)B_1^{m,\delta}, B_1^{m,\delta} \rangle = \int_{\tilde{\Lambda}} q|(1 - v_\delta)f_m b_0|^2 d\mu + \mathcal{O}_{m,\delta}(h)$$

$$(3.77) \quad \langle \text{Op}(q)B_2^{k,m}, B_2^{k,m} \rangle = \int_{\Lambda_k} q|f_m b_0^k|^2 d\mu + \mathcal{O}_m(h),$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\tilde{\Lambda}$  ou  $\Lambda_k$ . Comme  $b_0^k$  est régulière, on a

$$(3.78) \quad \langle \text{Op}(q)B_2^{k,m}, B_2^{k,m} \rangle = \int_{\Lambda_k} q|b_0^k|^2 d\mu + o_{m \rightarrow \infty}(1) + \mathcal{O}_m(h).$$

Pour la partie concernant  $B_1^{m,\delta}$ , le symbole  $b_0$  donné par (3.48) n'est pas régulier en 0 car  $|\det \varphi''_{t,\xi}|^{\frac{1}{2}}$  explose quand  $x \rightarrow 0$ . Mais en effectuant le changement de variable dont le Jacobien

est donné en (3.50) et en utilisant l'estimation (3.49), on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Op}(q)B_1^{m,\delta}, B_1^{m,\delta} \rangle &= \int q|(1-v_\delta)f_m|^2|b_0|^2 \left| \frac{dx}{d(t,\xi)} \right| dt d\xi + \mathcal{O}_{m,\delta}(h) \\
 &= \int q|b_0|^2(x(t,\xi), \nabla\psi(x(t,\xi))) \left| \frac{dx}{d(t,\xi)} \right| dt d\xi \\
 (3.79) \quad &+ o_{m \rightarrow \infty}(1) + o_{\delta \rightarrow 0}(1) + \mathcal{O}_{m,\delta}(h).
 \end{aligned}$$

Dans la formule précédente, l'intégration se fait sur  $[0, \varepsilon_0[ \times \sqrt{2(E - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}$  pour  $\varepsilon_0$  assez petit. On reconnaît une mesure dans le premier terme de (3.79). La proposition résulte alors de (3.72), (3.73), (3.74), (3.78) et (3.79) : on fixe d'abord  $\delta$  assez petit et  $m$  assez grand et finalement, on fait tendre  $h$  vers 0.

Ceci conclut la preuve pour  $E = E_0 + hF_1$ . Dans le cas  $E = E_0 + hE_1 + o_{h \rightarrow 0}(h)$ , il résulte des constructions précédentes que les symboles  $b_0$  et  $b_0^k$  qui apparaissent dans (3.78) et (3.79) sont holomorphes par rapport à  $F_1$  et que les termes d'erreur sont localement uniformes par rapport à  $F_1$ . Il suffit alors de prendre  $F_1 = E_1 + o_{h \rightarrow 0}(1)$  et d'utiliser la formule de Taylor en  $F_1 = E_1$ .  $\square$

### 3.7. Calcul de la mesure $\mu_{h^{-1}}$ .

Dans cette partie on calcule la mesure de Wigner  $\mu_{h^{-1}}$  définie dans la proposition 3.6. On a la proposition suivante

**Proposition 3.7.** — *La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  possède les propriétés suivantes qui la caractérisent uniquement :*

i) *La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  est supportée dans la surface d'énergie  $E_0$  :*

$$(3.80) \quad \text{supp } \mu_{h^{-1}} \subset p^{-1}(E_0)$$

ii) *La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  est nulle dans la zone entrante :*

$$(3.81) \quad \mu_{h^{-1}} = 0 \text{ dans } \{(x, \xi); |x| \text{ grand et } \cos(x, \xi) < -1/2\}.$$

iii) *La mesure  $\mu_{h^{-1}}$  vérifie l'équation d'évolution :*

$$\begin{aligned}
 (3.82) \quad (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} &= (\xi \partial_x - \nabla V(x) \partial_\xi + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \\
 &= (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 \delta_{x=0} \delta_{\frac{1}{2}\xi^2 + V(0) = E_0}
 \end{aligned}$$

*Démonstration.* — L'estimation (3.2) combinée avec l'existence de la mesure de Wigner (proposition 3.6) implique (3.80).

La preuve de (3.81) résulte de l'existence de la mesure et du fait que  $u_h = \mathcal{O}^\alpha(h^\infty)$  dans la zone entrante (équation (3.6) et proposition 3.4).

Soit  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  localisé près de  $\rho_0 = (x_0, \xi_0)$ . Comme  $(P - E)u_h = S_h$ , on a  $(P - E)u_h = \mathcal{O}(h^\infty)$  micro-localement près de  $\rho_0$ , si  $x_0 \neq 0$ . D'après (H6),  $E - \overline{E} = 2i \text{Im } E_1 h +$

$o(h)$ . En remarquant que  $H_p(q)$  est le symbole principal de l'opérateur pseudo-différentiel  $ih^{-1}[P, \text{Op}(q)]$ , il vient

$$(3.83) \quad \begin{aligned} \langle q, (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \rangle &= - \langle H_p(q) - 2q \text{Im } E_1, \mu_{h^{-1}} \rangle \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0} \langle i((P - E)^* \text{Op}(q) - \text{Op}(q)(P - E)) u_h, u_h \rangle + o(1) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} = 0$  pour  $x \neq 0$ .

On suppose maintenant que  $x_0 = 0$ . Près de  $\rho_0$ , la mesure  $\mu_{h^{-1}}$  est donnée comme somme des termes dominants de (3.78) et (3.79). D'après (3.62),  $B_2^k$  vérifie  $(P - E)B_2^k = 0$  micro-localement près de  $\rho_0$  et la preuve de (3.83) montre que ces termes ne contribuent pas dans le calcul de  $(H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}}$ . Donc,

$$(3.84) \quad \begin{aligned} \langle q, (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \rangle &= - \int (H_p(q) - 2q \text{Im } E_1) |b_0|^2(x(t, \xi), \nabla \psi(x(t, \xi))) \left| \frac{dx}{d(t, \xi)} \right| dt d\xi \\ &= - \int (\partial_t q(\rho(t, \xi)) - 2q(\rho(t, \xi)) \text{Im } E_1) |b_0|^2(x(t, \xi)) \left| \frac{dx}{d(t, \xi)} \right| dt d\xi, \end{aligned}$$

où  $\rho(t, \xi)$  est la courbe hamiltonienne avec donnée initiale  $(0, \xi)$  en  $t = 0$ . Comme avant, l'intégration se fait sur  $[0, \varepsilon_0] \times \sqrt{2(E - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}$ . D'après (3.17), (3.48), (3.49) et (3.50), on a

$$(3.85) \quad |b_0|^2(x(t, \xi)) \left| \frac{dx}{d(t, \xi)} \right| = (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 (1 + o_{t \rightarrow 0}(1)).$$

Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  avec  $\chi = 1$  près de 0 et on note  $\chi_m(t) = \chi(tm)$ . On voit  $\chi_m$  comme une fonction définie sur un voisinage de  $\rho_0 \in \mathbb{R}^{2n}$  en posant  $\chi_m(x, \eta) = \chi_m(t)$  si  $x = x(t, \xi)$  (rappelons que  $(t, \xi) \rightarrow x(t, \xi)$  est le changement de variables défini avant (3.50)). En utilisant la discussion précédente, il vient

$$(3.86) \quad \begin{aligned} \langle q, (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \rangle &= \langle \chi_m q, (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \rangle + \langle (1 - \chi_m) q, (H_p + 2 \text{Im } E_1) \mu_{h^{-1}} \rangle \\ &= - \langle (H_p - 2 \text{Im } E_1) (\chi_m q), \mu_{h^{-1}} \rangle + 0 \\ &= - \int \int_0^\infty (\chi(tm) (\partial_t q - 2q \text{Im } E_1) + m \chi'(tm) q) (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 (1 + o_{t \rightarrow 0}(1)) dt d\xi \\ &= \mathcal{O}(m^{-1}) - \int \int_0^\infty m \chi'(tm) q(\rho(0, \xi)) (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 (1 + o_{t \rightarrow 0}(1)) dt d\xi \\ &= \int q(0, \xi) (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 d\xi + o_{m \rightarrow \infty}(1) \\ &= \int q(0, \xi) (2\pi)^{1-n} |\widehat{S}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

où l'intégration se fait sur  $\sqrt{2(E - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}$ . □

#### 4. Contre-exemple quand l'hypothèse (H4) n'est pas vérifiée.

On donne ici un exemple (en dimension  $n = 1$  puis en dimension quelconque) de potentiel et de fonction  $S$  qui ne vérifient pas (H4) et dont la mesure limite n'est pas unique. Pour fixer les idées, on suppose que  $E = E_0$ .

En dimension  $n = 1$ , considérons un potentiel satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) et (H3) de la forme suivante :

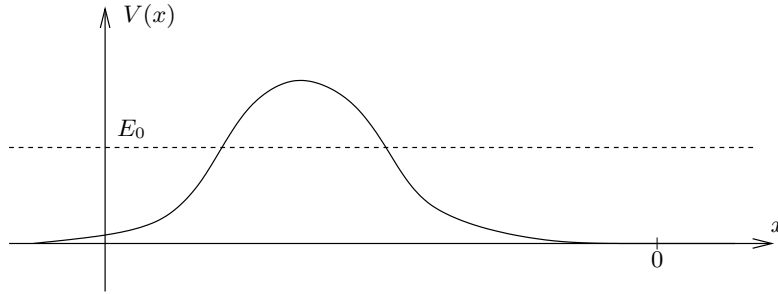


FIGURE 3. Le potentiel  $V(x)$ .

L'ensemble  $\Lambda$  ressemble alors à :

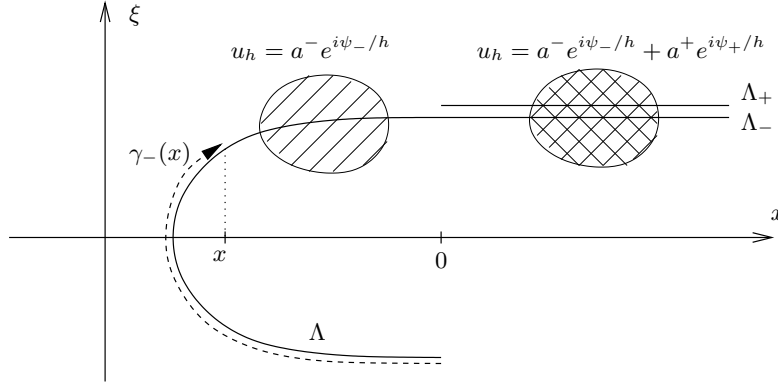


FIGURE 4. La variété  $\Lambda$  avec  $\Lambda_- = \Lambda_+$  dans la zone quadrillée.

Soit  $S$  une fonction vérifiant (H5). D'après la partie 3.5, la solution  $u_h$ , micro-localement dans la zone hachurée, est de la forme

$$(4.1) \quad u_h = a^-(x, h) e^{i\psi_-(x)/h} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où  $a^-$  est un symbole classique et  $\psi = \int_{\gamma_-(x)} \xi dx = \int_0^{t(x)} \xi(s)^2 ds$ . En particulier, si le support de  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est contenu dans la zone hachurée,

$$(4.2) \quad h \langle \text{Op}(q) u_h, u_h \rangle \longrightarrow \langle q, \mu_{h^{-1}} \rangle, \text{ pour } h \rightarrow 0,$$

et  $\mu_{h^{-1}}$  vérifie les conclusions du théorème 2.1.

Par contre, micro-localement dans la zone quadrillée,  $u_h$  est de la forme

$$(4.3) \quad u_h = a^-(x, h)e^{i\psi_-(x)/h} + a^+(x, h)e^{i\psi_+(x)/h} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

où  $a^+$  et  $\psi_+$  vérifient le même type de propriétés que  $a^-$  et  $\psi_-$ . En particulier,

$$(4.4) \quad \psi_-(x) = \int_{\gamma_-(x)} \xi dx = \int_{\gamma_-(0)} \xi dx + \int_{\gamma_+(x)} \xi dx = \mathcal{A} + \psi_+(x),$$

où  $\mathcal{A} = \int_0^{t(0)} \xi(s)^2 ds > 0$  est l'action associée à la courbe  $\gamma_-(0)$ . En outre, en utilisant (3.48), le fait que les  $a^\bullet$  vérifient la même équation de transport dans (la projection en  $x$  de) la zone quadrillée et la théorie de Maslov, on trouve

$$(4.5) \quad a_0^-(x) = e^{-i\nu\pi/2} \frac{\widehat{S}(-\sqrt{2(E-V(0))})}{\widehat{S}(\sqrt{2(E-V(0))})} r a_0^+(x) = e^{i\theta} \tilde{r} a_0^+(x),$$

où  $\nu$  est l'indice de Maslov associé à la courbe  $\gamma_-(0)$  et  $r, \tilde{r} \in ]0, +\infty[, \theta \in \mathbb{R}$  sont des constantes. Pour que  $a_0^-$  et  $a_0^+$  soient non nuls, on suppose que les transformées de Fourier de  $S$  qui apparaissent dans (4.5) sont non nulles. Ainsi, si le support de  $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  est contenu dans la zone quadrillée,

$$(4.6) \quad \begin{aligned} h\langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle &= \int q(x, \nabla\psi_\bullet(x)) (|a_0^-|^2 + |a_0^+|^2 + 2\text{Re}(a_0^- \overline{a_0^+} e^{i\mathcal{A}/h})) dx + o_{h \rightarrow 0}(1) \\ &= \int q(x, \nabla\psi_\bullet(x)) (|a_0^-|^2 + |a_0^+|^2 + 2|a_0^-||a_0^+|\cos(\theta + \mathcal{A}/h)) dx + o_{h \rightarrow 0}(1). \end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{A} \neq 0$ , on obtient facilement la

**Proposition 4.1.** — *Sous les hypothèses précédentes et pour tout  $\nu \in [-1, 1]$ , on peut trouver un ensemble de  $h$  adhérent à 0 tel que*

$$(4.7) \quad h\langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle \longrightarrow \int q(x, \nabla\psi_\bullet(x)) (|a_0^-|^2 + |a_0^+|^2 + 2\nu|a_0^-||a_0^+|) dx,$$

quand  $h$  tend vers 0 dans cet ensemble.

En particulier, la mesure limite n'est plus unique. La mesure du théorème 2.1 correspond à  $\nu = 0$ . Il se peut que la mesure soient nulle en dehors d'un compact. En dimension plus grande, en s'inspirant de [3], on peut construire un potentiel tel que localement près d'un point  $\rho_0$  l'ensemble  $\Lambda$  soit la réunion de 2 variétés  $\Lambda_-$  et  $\Lambda_+$  qui coïncident (figure 5).

Comme en dimension  $n = 1$ , micro-localement près de  $\rho_0$ , la fonction  $u_h$  s'écrit

$$(4.8) \quad u_h = a^-(x, h)e^{i\psi_-(x)/h} + a^+(x, h)e^{i\psi_+(x)/h} + \mathcal{O}(h^\infty),$$

La différence des phases  $\mathcal{A}(x) = \psi_-(x) - \psi_+(x)$  est encore l'action le long de la courbe  $\gamma_{-,x}(0)$  :

$$(4.9) \quad \mathcal{A}(x) = \int_{\gamma_{-,x}(0)} \xi \cdot dx.$$

Mais on remarque que cette action ne dépend pas de  $x$ . En effet, si  $\gamma_{-,x_1}(0)$  et  $\gamma_{-,x_2}(0)$  sont deux chemins, le fait que les  $l_\bullet$  soient dans  $\{x = 0\}$ , la formule de Stokes et le caractère

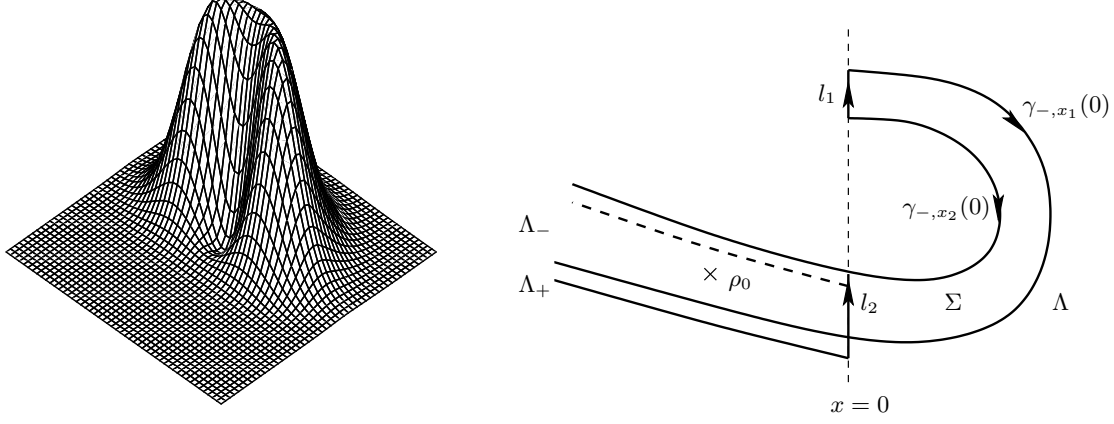


FIGURE 5. Un exemple de potentiel, égal à l'oscillateur harmonique dans un petit secteur angulaire, qui re-focalise en 0 tous les rayons issus d'un secteur angulaire en 0. L'ensemble  $\Lambda$ , avec  $\Lambda_- = \Lambda_+$  près de  $\rho_0$ , est décrit à droite.

lagrangien de  $\Lambda$  impliquent

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_{-,x_1}(0)} \xi \cdot dx - \int_{\gamma_{-,x_2}(0)} \xi \cdot dx &= \int_{\gamma_{-,x_1}(0)} \xi \cdot dx + \int_{l_2} \xi \cdot dx - \int_{\gamma_{-,x_2}(0)} \xi \cdot dx + \int_{l_1} \xi \cdot dx \\
 (4.10) \qquad \qquad \qquad &= \int_{\Sigma} d\xi \wedge dx = 0.
 \end{aligned}$$

On peut aussi dire que comme  $\Lambda_-$  et  $\Lambda_+$  coïncident, on a  $\nabla\psi_- = \nabla\psi_+$  et donc  $\psi_-$  et  $\psi_+$  diffèrent d'une constante. Cette remarque permet d'adapter la preuve de la proposition 4.1 à cette situation.

### 5. Preuve de la proposition 2.3.

En notant  $a \# b$  le symbole de l'opérateur  $\text{Op } a \circ \text{Op } b$ , on a

$$\begin{aligned}
 q(p - E_0)^2 &= (p - E_0)(q \# (p - E_0)) + \frac{h}{2i}(p - E_0)H_p q + h^2 r(x, \xi, h) \\
 &= (p - E_0) \# (q \# (p - E_0)) - \frac{h}{2i}H_p(q \# (p - E_0)) + \frac{h}{2i}(p - E_0)H_p q + h^2 r(x, \xi, h) \\
 (5.1) \qquad &= (p - E_0) \# (q \# (p - E_0)) + h^2 r(x, \xi, h),
 \end{aligned}$$

où  $r \in S_{\text{cl}}(1)$  change de lignes en lignes et à son support inclus dans le support (compact) de  $q$ , modulo  $S(h^\infty \langle x \rangle^{-\infty} \langle \xi \rangle^{-\infty})$ . Mais alors, en utilisant que  $u_h = \mathcal{O}(h^{-1/2})$  micro-localement près du support de  $q$ ,  $\|S_h\| = \mathcal{O}(1)$  et  $\langle \text{Op}(q)u_h, u_h \rangle = \mathcal{O}(h^{-1})$  (d'après le théorème 2.1), il vient

$$\begin{aligned}
 \langle \text{Op}(q(p - E_0)^2)u_h, u_h \rangle &= \langle \text{Op}(p - E_0) \text{Op}(q) \text{Op}(p - E_0)u_h, u_h \rangle + \mathcal{O}(h) \\
 &= \langle \text{Op}(q) \text{Op}(p - E)u_h, \text{Op}(p - E)u_h \rangle + \mathcal{O}(h) \| \text{Op}(q)u_h \| \|S_h\| + \mathcal{O}(h) \\
 (5.2) \qquad \qquad \qquad &= \langle \text{Op}(q)S_h, S_h \rangle + \mathcal{O}(h^{\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$



Grâce à la formule sur l'application d'un opérateur pseudo-différentiel sur une distribution lagrangienne (théorème 1.2.8 de [18]) ou en faisant le calcul explicitement, on obtient

$$\begin{aligned}
 \text{Op}(q)S_h &= \text{Op}(q)g(x)S_h + \mathcal{O}(h^\infty) \\
 &= (2\pi)^{-n}h^{-n/2} \int \text{Op}(q)g(x)e^{ix \cdot \xi/h} \widehat{S}(\xi) d\xi + \mathcal{O}(h^\infty) \\
 (5.3) \quad &= (2\pi)^{-n}h^{-n/2} \int q(x, \xi)g(x)e^{ix \cdot \xi/h} \widehat{S}(\xi) d\xi + \mathcal{O}(h),
 \end{aligned}$$

pour  $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  avec  $g = 1$  près de 0. En particulier, (5.2) devient

$$\langle \text{Op}(q(p - E_0)^2)u_h, u_h \rangle = (2\pi)^{-2n}h^{-n} \iiint q(x, \xi)g(x)e^{ix \cdot \xi/h} \widehat{S}(\xi)e^{-ix \cdot \theta/h} \overline{\widehat{S}}(\theta) dx d\xi d\theta + \mathcal{O}(h).$$

La méthode de la phase stationnaire en variables  $(x, \theta)$  donne alors

$$(5.4) \quad \langle \text{Op}(q(p - E_0)^2)u_h, u_h \rangle = (2\pi)^{-n} \int q(0, \xi) |\widehat{S}(\xi)|^2 d\xi + \mathcal{O}(h),$$

ce qui démontre la proposition.

## 6. Equivalence entre les hypothèses (H4) et (H4)'.

**Lemme 6.1.** — Soient  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  deux sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  de même dimension  $m$ . Alors l'ensemble fermé  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_1$  si et seulement si il est de mesure nulle dans  $\Lambda_2$ .

*Démonstration.* — On travaille localement près de  $\rho_0 \in \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ . Il est possible de trouver,  $E$ , un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m - n$  qui soit supplémentaire à  $T_{\rho_0}\Lambda_1$  et à  $T_{\rho_0}\Lambda_2$ . Pour cela, on peut utiliser la propriété suivante : si  $A, B$  sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $G$ , alors  $A \cup B = G$  si et seulement si  $A = G$  ou  $B = G$ .

On note  $F = T_{\rho_0}\Lambda_1$  et  $\Pi$  la projection linéaire de  $\mathbb{R}^n$  sur  $F$  parallèlement à  $E$ . Alors,  $\Pi$  est un difféomorphisme local de  $\Lambda_1$  sur  $F$  et de  $\Lambda_2$  sur  $F$ . De plus, les mesures de Lebesgue sur  $\Lambda_\bullet$  sont transportées en des mesures sur  $F$ . Ces deux mesures ainsi que la mesure de Lebesgue sur  $F$  sont absolument continues les unes par rapport aux autres. En particulier,  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_1$  ssi  $\Pi(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$  est de mesure nulle dans  $F$  pour une des trois mesures précédentes ssi  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$  est de mesure nulle dans  $\Lambda_2$ .  $\square$

On rappelle que si  $\rho(t) = (x(t), \xi(t))$  est une courbe hamiltonienne dans  $p^{-1}(E_0)$ , alors  $\tilde{\rho}(t) = (x(-t), -\xi(-t))$  en est aussi une. Donc,

$$\begin{aligned}
 \{ \xi \in \sqrt{2(E_0 - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}; \exists t < 0 \quad \Pi_x \exp(tH_p)(0, \xi) = 0 \} \\
 = - \{ \xi \in \sqrt{2(E_0 - V(0))} \mathbb{S}^{n-1}; \exists t > 0 \quad \Pi_x \exp(tH_p)(0, \xi) = 0 \}.
 \end{aligned}$$

En particulier, dans l'hypothèse (H4), on peut remplacer  $t > 0$  par  $t \neq 0$ .

**Lemme 6.2.** — Supposons (H1)–(H3). Les hypothèses (H4) et (H4)' sont équivalentes.

L'équivalence entre les hypothèses (H7) et (H7)' se démontre de la même façon.

*Démonstration.* — Supposons (H4) et considérons l'intersection de  $\Lambda_j$  et  $\Lambda_k$  avec  $j < k$  près d'un point  $\rho_0$ . La variété  $\Lambda_j$  est paramétrée par l'application  $\rho(t, \xi) = \exp(tH_p)(0, \xi)$  avec  $t$  au voisinage de  $t_j$  et  $\xi \in \sqrt{2(E_0 - V(0))}\mathbb{S}^{n-1}$  au voisinage de  $\xi_j$ .

Donc, un point  $\rho = \rho(t, \xi)$  est dans  $\Lambda_j \cap \Lambda_k$  ssi il existe  $s$  proche de  $t_k$  tel que  $\rho(s, \xi) = \rho(t, \xi)$  ssi il existe  $u = s - t$  proche de  $t_k - t_j$  tel que  $\rho(u, \xi) = (0, \xi)$  ssi

$$\xi \in M_{j,k} = \left\{ \xi \in \sqrt{2(E_0 - V(0))}\mathbb{S}^{n-1} \text{ proche de } \xi_j; \right. \\ \left. \exists t > 0 \text{ proche de } t_k - t_j \quad \Pi_x \exp(tH_p)(0, \xi) = 0 \right\}.$$

En utilisant le théorème de Fubini pour séparer les variables  $t$  et  $\xi$ , on a

$$\begin{aligned} \text{mes}_n \Lambda_j \cap \Lambda_k &= \int_{\Lambda_j} \mathbf{1}_{\Lambda_j \cap \Lambda_k} d\mu \lesssim \iint \mathbf{1}_{\rho(t, \xi) \in \Lambda_j} \mathbf{1}_{\xi \in M_{j,k}} dt d\xi \\ (6.1) \qquad \qquad \qquad &\lesssim \int \mathbf{1}_{\xi \in M_{j,k}} d\xi = \text{mes}_{n-1} M_{j,k}. \end{aligned}$$

Comme  $\text{mes}_{n-1} M_{j,k} = 0$  d'après (H4), l'hypothèse (H4)' est vérifiée.

Réciproquement, supposons (H4)'. Soit  $\xi_0 \in \sqrt{2(E_0 - V(0))}\mathbb{S}^{n-1}$ . En utilisant le même raisonnement que (6.1) mais en sens inverse, on trouve

$$\begin{aligned} \text{mes}_{n-1} \left\{ \xi \in \sqrt{2(E_0 - V(0))}\mathbb{S}^{n-1} \text{ proche de } \xi_0; \exists t > 0 \quad \Pi_x \exp(tH_p)(0, \xi) = 0 \right\} \\ = \sum_k M_{0,k} \lesssim \sum_k \text{mes}_n \tilde{\Lambda} \cap \Lambda_k. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (H4)', cette quantité est nulle. L'hypothèse (H4) découle alors d'un argument de compacité en  $\xi_0$ .  $\square$

## Références

- [1] J. D. Benamou, F. Castella, T. Katsaounis, and B. Perthame, *High frequency limit of the Helmholtz equations*, Rev. Mat. Iberoamericana **18** (2002), no. 1, 187–209.
- [2] N. Burq, *Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries*, Int. Math. Res. Not. (2002), no. 5, 221–241.
- [3] F. Castella, *The radiation condition at infinity for the high-frequency Helmholtz equation with source term : a wave-packet approach*, J. Funct. Anal. **223** (2005), no. 1, 204–257.
- [4] F. Castella and T. Jecko, *Besov estimates in the high-frequency Helmholtz equation, for a non-trapping and  $C^2$  potential*, J. Differential Equations **228** (2006), no. 2, 440–485.
- [5] F. Castella, T. Jecko, and A. Knauf, *Semiclassical resolvent estimates for Schrödinger operators with coulomb singularities*, preprint, disponible sur arXiv (2007), no. 0702009.
- [6] F. Castella, B. Perthame, and O. Runborg, *High frequency limit of the Helmholtz equation. II. Source on a general smooth manifold*, Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), no. 3-4, 607–651.
- [7] M. Dimassi and J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 268, Cambridge University Press, 1999.
- [8] M. Fedoriuk and V. Maslov, *Semiclassical approximation in quantum mechanics*, Mathematical Physics and Applied Mathematics, vol. 7, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1981.
- [9] E. Fouassier, *High frequency analysis of Helmholtz equations : case of two point sources*, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), no. 2, 617–636 (electronic).

- [10] E. Fouassier, *High frequency limit of Helmholtz equations : refraction by sharp interfaces*, J. Math. Pures Appl. (9) **87** (2007), no. 2, 144–192.
- [11] C. Gérard, *A proof of the abstract limiting absorption principle by energy estimates*, preprint, disponible sur mp-arc (2007), no. 07-43.
- [12] C. Gérard and A. Martinez, *Principe d'absorption limite pour des opérateurs de Schrödinger à longue portée*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **306** (1988), no. 3, 121–123.
- [13] C. Gérard and A. Martinez, *Semiclassical asymptotics for the spectral function of long-range Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **84** (1989), no. 1, 226–254.
- [14] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. I*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 256, Springer-Verlag, 1990, Distribution theory and Fourier analysis.
- [15] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators. IV*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 275, Springer-Verlag, 1994, Fourier integral operators, Corrected reprint of the 1985 original.
- [16] H. Isozaki and H. Kitada, *Modified wave operators with time-independent modifiers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **32** (1985), no. 1, 77–104.
- [17] H. Isozaki and H. Kitada, *A remark on the microlocal resolvent estimates for two body Schrödinger operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **21** (1985), no. 5, 889–910.
- [18] V. Ivrii, *Microlocal analysis and precise spectral asymptotics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1998.
- [19] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators*, Comm. Math. Phys. **78** (1980/81), no. 3, 391–408.
- [20] B. Perthame and L. Vega, *Morrey-Campanato estimates for Helmholtz equations*, J. Funct. Anal. **164** (1999), no. 2, 340–355.
- [21] D. Robert, *Autour de l'approximation semi-classique*, Progress in Mathematics, vol. 68, Birkhäuser Boston Inc., 1987.
- [22] D. Robert and H. Tamura, *Semiclassical estimates for resolvents and asymptotics for total scattering cross-sections*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), no. 4, 415–442.
- [23] D. Robert and H. Tamura, *Semi-classical asymptotics for local spectral densities and time delay problems in scattering processes*, J. Funct. Anal. **80** (1988), no. 1, 124–147.
- [24] D. Robert and H. Tamura, *Asymptotic behavior of scattering amplitudes in semi-classical and low energy limits*, Ann. Inst. Fourier **39** (1989), no. 1, 155–192.
- [25] X. P. Wang, *Microlocal estimates of the Schrödinger equation in semi-classical limit*, preprint, disponible sur [www.math.sciences.univ-nantes.fr/~wang/](http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~wang/) (2007).
- [26] X. P. Wang and P. Zhang, *High-frequency limit of the Helmholtz equation with variable refraction index*, J. Funct. Anal. **230** (2006), no. 1, 116–168.

---

JEAN-FRANÇOIS BONY,  
 Institut de Mathématiques de Bordeaux,  
 UMR 5251 du CNRS,  
 Université de Bordeaux I,  
 351 cours de la Libération,  
 33405 Talence,  
 France  
*E-mail* : [bony@math.u-bordeaux1.fr](mailto:bony@math.u-bordeaux1.fr)